

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Донецкий государственный университет»

Факультет математики и информационных технологий  
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ  
проректор

\_\_\_\_\_ П. А. Машаров  
«17» апреля 2025 г.  
МП

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

### **НЕРАВЕНСТВА**

Укрупненная группа направлений подготовки	01.00.00 Математика и механика
Программа высшего образования	Программа бакалавриата
Направление подготовки	01.03.01 Математика
Направленность (профиль) образовательной программы	Математика
Квалификация	Бакалавр
Форма обучения	Очная

Рабочая программа может быть адаптирована для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Донецк 2025

Рабочая программа дисциплины **«Неравенства»** для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 Математика (Профиль: Математика), составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 8 (с изм. и доп.), Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 06 апреля 2021 г. № 245 (с изм. и доп.), в соответствии с учебным планом, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «ДонГУ» для набора 2025 года.

Разработчик:

доцент кафедры математического анализа и  
дифференциальных уравнений,  
канд. физ.-мат. наук

А. Ю. Иванов

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры математического анализа и  
дифференциальных уравнений.  
Протокол от 08.04.2025 г. № 9а

Заведующий кафедрой

В. В. Волчков

СОГЛАСОВАНО:

Декан факультета математики и  
информационных технологий  
16.04.2025 г.

И. А. Моисеенко

Учебно-методическая комиссия факультета математики и информационных технологий.  
Протокол от 16.04.2025 г. № 3.  
Председатель

Л. И. Селякова

Руководитель основной образовательной  
программы, д-р физ.-мат. наук, проф.  
16.04.2025 г.

В. В. Волчков

## 1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1.1. Требования к предварительной подготовке обучающихся, предшествующие и сопутствующие дисциплины, на которых основывается изучение данной:

базовая подготовка по математике в объёме программы средней школы; Математический анализ, Комплексный анализ, Дифференциальные уравнения, Функциональный анализ.

1.2. Дисциплины, курсовые работы и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее:

Специальные курсы, выпускная квалификационная работа, Производственная практика: научно-исследовательская работа, Преддипломная практика.

## 2. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 2.1. Общая характеристика

Наименование показателя	Значение показателя
Название образовательной программы (далее – ОП)	01.03.01 Математика (Профиль: Математика)
Шифр и название в соответствии с учебным планом	Б1.В.ДВ.1.1 Неравенства
Часть образовательной программы	Вариативная часть: выбор обучающегося
Количество зачетных единиц / всего часов	4 / 144

В случае предъявления от обучающегося или его родителя (законного представителя) заявления на обучение по адаптированной образовательной программе высшего образования, подкрепленного заключением психолого-медико-педагогической комиссии (ПМПК) или медико-социальной экспертизы (МСЭ) с рекомендациями создания индивидуальной программы реабилитации и абилитации (ИПРА), данная рабочая программа может быть адаптирована с учетом индивидуальных особенностей здоровья обучающегося.

### 2.2. Распределение часов по формам и периодам обучения

Форма обучения	курс	семестр	Общее количество часов					Форма контроля
			лекционных	лабораторных	практических	самостоятельной работы + контроль	всего	
Очная	4	7	26	0	39	79	144	экзамен
Очная, всего			26	0	39	79	144	

## 3. ЦЕЛИ ДИСЦИПЛИНЫ

Подготовка к изучению некоторых разделов математического анализа, специальных курсов. Ознакомление студентов с полезными и важными неравенствами, изучение которых не входит в основные курсы анализа, а также демонстрация возможностей их использования в математическом и функциональном анализе, дифференциальных уравнениях. Развитие у студентов логического мышления, математической интуиции и культуры.

#### 4. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ КОМПОНЕНТА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ, ИХ ИНДИКАТОРЫ И ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

##### 4.1. Компетенции

ПК-2. Способен осуществлять педагогическую деятельность по реализации программ основного общего и среднего общего образования в рамках модуля «Предметное обучение. Математика».

##### 4.2. Индикаторы компетенций

ПК-2.3. Применяет классические методы решения и доказательства неравенств при осуществлении педагогической деятельности в рамках модуля «Предметное обучение. Математика».

##### 4.3. Результаты обучения

ПК-2.3.1. Знает определения и утверждения, методы решения задач, приёмы доказательства классических неравенств.

ПК-2.3.2. Владеет методами доказательства неравенств, используя метод математической индукции, основные классические неравенства и средства математического анализа.

ПК-2.3.3. Умеет решать неравенства различного характера.

#### 5. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Название темы	Краткое содержание темы (вопросы темы)
1. Основные неравенства	1.1.Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, различные доказательства. 1.2.Неравенства Юнга, Минковского Гельдера. 1.3.Неравенства для дифференциальных операторов, неравенства Секефальви-Надя. 1.4.Неравенство Беккенбаха. 1.5.Неравенство Стеффенсена.
2. Вокруг принципа максимума модуля	2.1.Доказательство Ландау принципа максимума модуля. 2.2.Неравенство Коши, теорема Лиувилля, лемма Бернштейна о росте полиномов.
3. Элементарные средние значения	3.1.Обычные средние, взвешенные средние. 3.2.Обобщения классических неравенств. 3.3.Суммы $\sigma_r(a)$ . 3.4.Неравенство Чебышева, неравенство Виртингера.

#### 6. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

##### 6.1. Форма обучения – очная, курс – 4, семестр – 7

Наименования разделов и тем	Количество часов				
	Лекц.	Лабор.	Практ.	СРС+К	Всего
1.Основные неравенства	14	0	20	42	76
2.Вокруг принципа максимума модуля	4	0	3	13	20
3.Элементарные средние значения	8	0	16	24	48
ИТОГО ЗА СЕМЕСТР	26	0	39	79	144
ИТОГО ПО КОМПОНЕНТУ ОПОП	26	0	39	79	144

## 7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (СРЕДСТВА) ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### 7.1. Контрольные вопросы

1. Неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим, его различные доказательства.
2. Пропорциональные последовательности. Обыкновенные средние. Взвешенные средние.
3. Неравенства Чебышева, Виртингера, Гельдера, Минковского, Юнга, Беккенбаха, Стеффенсона, Бернулли, Коши-Буняковского, Йенсена
4. Неравенство связывающее  $u, u', u''$ .
5. Принцип максимума модуля. Доказательство Ландау. Неравенство Коши роста коэффициентов ряда Макларена голоморфной функции. Теорема Лиувилля.
6. Теорема о соотношении геометрического среднего и элементарных средних.

### 7.2. Темы докладов (рефератов)

1. Неравенство Коши. Доказательство Якобсталя.
2. Неравенство Коши. Доказательство Бора.
3. Неравенство Стеффенсона.
4. Неравенство Беккенбаха.
5. Неравенство Виртингера.
6. Другие неравенства Минковского.
7. Неравенство Бернштейна и М.Рисса для производных.
8. Неравенства для промежуточных производных.

### 7.3. Темы письменных работ (типы задач)

Контрольные работы по практике включают задания указанных типов.

Применение метода математической индукции к решению задач; доказательства и решение неравенств при помощи классических неравенств; доказательство неравенств методами комплексного анализа; доказательство неравенств при помощи методов дифференциально-интегрального исчисления.

Контрольная работа по проверке теоретических знаний – по изученным темам, с использованием указанных выше контрольных вопросов.

### 7.4. Образец содержания экзаменационного билета

- 1) Неравенство связывающее  $u, u', u''$ .
- 2) Неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим. Доказательство Коши.
- 3) Предельные теоремы элементарных средних
- 4) Неравенство Минковского в интегральной форме.
- 5) При условии, что  $a, b, c \geq 0, a + b + c = 1$ . Доказать  $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 8(1 - a)(1 - b)(1 - c)$ .
- 6)  $a, b > 0$ , доказать, что  $\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} \geq \frac{a^3b + ab^3}{2}$

Доказать неравенство  $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, n > 1$

В случае ведения учебного процесса с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, содержание билета может отличаться от приведенного.

## 8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛОВ, КОТОРЫЕ ПОЛУЧАЮТ ОБУЧАЮЩИЕСЯ

Общая оценка знаний обучающихся по дисциплине проводится по 100-балльной шкале исходя из максимума, приведенного в таблице ниже.

Организационно-учебная работа в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, своевременное и качественное выполнение домашних заданий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (участие в обсуждении текущего и пройденного материала, решение задач и т.п.).

Самостоятельная работа оценивается на основе предоставленных на проверку выполненных домашних, индивидуальных заданий с учетом своевременности их предоставления и соответствия требованиям к их выполнению.

Количество баллов за контрольную работу вычисляется как сумма баллов за все входящие в её состав задания. Каждое задание оценивается исходя из максимально возможного количества баллов с учетом правильности выполнения задания, полноты приводимых обоснований.

По результатам работы в семестре обучающийся, набравший не менее 60 баллов, имеет право получить оценку. Те, кто претендует на более высокий балл, проходят промежуточную аттестацию. Максимальное количество баллов на промежуточной аттестации – 100. Общее количество баллов за семестр вычисляется как максимальная из полученных за семестр и на промежуточной аттестации и выставляется согласно принятому порядку.

### 8.1. Семестр 7

Номера разделов	Виды работ	Максимальное количество баллов
1-3	Организационно-учебная работа в аудитории	5
	Контрольная работа по практике	20
	Доклад	30
	Модульная контрольная работа	45
ИТОГО		100
Экзамен		100
Общий итог за семестр		100

#### Соответствие баллов оценке

Количество баллов из 100	ECTS	Оценка по пятибалльной шкале	
		Экзамен, дифференцированный зачет	Зачет
90-100	A	отлично	зачтено
80-89	B	хорошо	зачтено
75-79	C		зачтено
70-74	D	удовлетворительно	зачтено
60-69	E		зачтено
35-59	FX	неудовлетворительно	не зачтено
0-34	F		не зачтено

## 9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Учебные занятия проводятся в Главном корпусе ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6). Для проведения занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской, мультимедийный проектор и экран, ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя, выход в Интернет – проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в учебно-методическом кабинете Главного корпуса (ауд.405).

Обучающиеся имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине, размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ФГБОУ ВО «ДонГУ». При изучении дисциплины могут применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

С использованием ресурсов платформы дистанционного образования осуществляется текущий контроль знаний обучающихся на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

## 10. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

### 10.1. Основная литература

1. Беккенбах, Э. Ф. Неравенства / Э. Беккенбах, Р. Беллман ; Пер. с англ.: Г. И. Басса и др. ; Под. ред. В. И. Левина. - М. : Мир, 1965. - 276 с.
2. Харди Г. Г. Неравенства / Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуд, Г. Полиа ; Пер. с англ. В. И. Левина с доп. В. И. Левина и С. Б. Стечкина. - М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. - 456 с.

### 10.2. Дополнительная литература

3. Сборник задач по математическому анализу. [Т. 1] : Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин ; Под ред. Л. Д. Кудрявцева. - М. : Наука, 1984. - 592 с.
4. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа : [Учеб. пособие мат. специальностей ун-тов] / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - 5-е изд. - М. : Наука, 1981. - 543 с.

1.

## 11. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. **Национальная электронная библиотека (НЭБ):** федеральная государственная информационная система / Министерство Культуры РФ; Российская государственная библиотека. – Москва, 2019- . – URL: <https://rusneb.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный, подписка. Необходима установка программного обеспечения. – Текст: электронный.

2. **eLIBRARY.RU:** научная электронная библиотека: сайт. – Москва, 2000- . – URL: <https://elibrary.ru> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. –Текст: электронный.

3. Научная электронная библиотека **«КиберЛенинка»:** сайт / Ассоциация «Открытая наука». – Москва, 2014- . – URL: <https://cyberleninka.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.

4. Электронно-библиотечная система «Лань»: [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: издания Сетевой электронной библиотеки, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
5. ЭБС Юрайт: электронная библиотечная система: сайт. – Москва, 2013. – URL: <https://urait.ru/library/svobodnyy-dostup/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: издания свободного доступа, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
6. Электронно-библиотечная система ДонГУ: сайт / ФГБОУ ВО «ДонГУ». – Донецк, 2016- . – URL: <http://library.donnu.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
7. Электронный каталог Научной библиотеки ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://library.donnu.ru/catalog/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: поиск свободный, электронные документы – для пользователей ДонГУ.
8. Электронный архив ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://repo.donnu.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный.

## 12. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Windows 7 PRO (корпоративная лицензия ДонГУ № 46484614)
2. Microsoft Office (корпоративная лицензия ДонГУ № 46472919)
3. Microsoft Visual Studio (лицензия программы Dream Spark для высших учебных заведений)
4. Антивирус Касперского, Adobe Acrobat Reader, xPDF (лицензии GPL, Apache, BSD для свободного программного обеспечения).